

**MT - 02**

December - Examination 2015

**B.A./B.Sc. Part-I Examination****Calculus and Differential Equations****Paper - MT - 02****Time : 3 Hours ]****[ Max. Marks :- 67**

**Note :** The question paper is divided into three Sections A, B, and C. Use of calculator is allowed in this paper.

**नोट :** प्रश्न पत्र तीन खण्डों ए, बी, और सी में विभाजित है। इस प्रश्नपत्र में कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

**Section - A**

7 x 1 = 7

**Note :** Section 'A' contain seven (07) Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 marks and maximum word limit is thirty words.

**(खण्ड - अ)**

**नोट :** खण्ड 'ए' में सात (07) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न के 01 अंक है और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द हैं।

- 1) (i) How many number of maximum asymptotes of the following curve.

दिए गए वक्र की अधिकतम कितनी अनन्त स्पर्शियाँ होंगी ?

$$4x^3 - x^2y - 4xy^2 + y^3 + 3x^2 + 2xy - y^2 - 7 = 0$$

- (ii) Write the formula of Rabbe's test.

राबे परीक्षण का सूत्र लिखिए।

- (iii) Write the degree and order of the following differential equation.

निम्न अवकल समीकरण की कोटि तथा घात लिखिए।

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = \sin^2x$$

- (iv) Write the relation between beta and gamma function.

बीटा व गामा फलन में सम्बन्ध लिखिए।

- (v) Write the formula of radius of curvature for intrinsic equation

वक्र की नैज समीकरण के लिए वक्रता त्रिज्या का सूत्र लिखिए।

- (vi) Write necessary and sufficient conditions for exact differential equations.

यथार्थ अवकल समीकरण के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध लिखिए।

- (vii) Write the condition of convergence of the hyper-harmonic series.

हाइपर-हारमोनिक श्रेणी के अभिसारी होने का प्रतिबंध लिखिए।

**Section - B**

4 x 8 = 32

**Note :** Section 'B' contain Eight Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any four (04) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

**(खण्ड - ब)**

**नोट :** खण्ड - 'ब' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को कीन्हीं भी चार (04) सवालों के जवाब देने हैं। प्रत्येक प्रश्न 08 अंक का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

2) Prove that सिद्ध करो कि  $\Gamma n \Gamma(1 - n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$

3) Solve the following differential equation:

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए:

$$(3xy - 2ay^2)dx + (x^2 - 2axy)dy = 0$$

4) A circular arc revolves about its chord. Find the area of the surface formed, if the radius of the arc is  $a$  and it subtends angle  $2a$  at the centre.

एक वृत्तीय चाप अपनी जीवा के चारों ओर घूमता है। इस प्रकार जनित पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये, जहाँ वृत्त की त्रिज्या  $a$  तथा चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण  $2a$  है।

5) Find the area of a loop of the curve  $r = a \sin 3\theta$ .

वक्र  $r = a \sin 3\theta$  के एक लूप का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

- 6) Find the Maximum of Minimum of the following function.

निम्न फलनों का उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए।

$$\sin x + \cos 2x$$

- 7) If  $u = F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$  then by chain rule find the value of

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$$

यदि  $u = F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$  हो तो श्रृंखला नियम से  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$  का मान ज्ञात कीजिए।

- 8) Find the envelope of a straight line drawn at right angles to the ends of the radii vectors of the cardioid  $r = a(1 + \cos\theta)$

उन रेखाओं का अन्वालोप ज्ञात किजिये जो कार्डिआइड  $r = a(1 + \cos\theta)$  की ध्रुवान्तर रेखाओं के सिरो से उन पर समकोण बनाती हुई खींची जाये।

- 9) Find the intrinsic equation of the asteroid  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ , when  $s$  is measured :

(i) From the cusp on the axis of  $x$ .

(ii) From the vertex

एस्टाइड का  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  नैज समीकरण ज्ञात कीजिये जबकि  $s$  नापा गया हो :

(i)  $x$  - अक्ष पर कस्प से

(ii) शीर्ष से

**Note :** Section 'C' contain 4 Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer any two (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words.

(खण्ड - स)

**नोट :** खण्ड 'सी' में चार निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को कीन्हीं भी दो (02) सवालों के जवाब देने हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है, परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

10) (i) Test the convergence of series

$$1 + \frac{ab}{1.c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1.2.3c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots$$

Where  $x$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  are all positive.

श्रेणी

$$1 + \frac{ab}{1.c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1.2.3c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots$$

जहाँ  $x$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  सभी धनात्मक हैं।

(ii) State and prove Maclaurin's theorem of expansion of a function.

फलनों के प्रसार कि मेक्लारिन प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिये।

- 11) (i) Show that the eight points of intersection of the curve  $xy(x^2 - y^2) + x^2 + y^2 = a^2$  and its asymptotes lie on a circle whose centre is at the origin.

सिद्ध करो कि वक्र  $xy(x^2 - y^2) + x^2 + y^2 = a^2$  तथा अनन्तस्पर्शी के 8 प्रतिच्छेद बिन्दु एक वृत्त पर स्थित हैं जिसका केन्द्र मूल बिन्दु पर है।

- (ii) Show that the radius of curvature at a point  $(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$  on the curve  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  is  $\frac{3a}{2} \sin 2\theta$ .

सिद्ध कीजिये कि वक्र  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  के बिन्दु  $(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$  पर वक्रता त्रिज्या  $\frac{3a}{2} \sin 2\theta$  होगी।

- 12) (i) Trace the following curve :

निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए :

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

- (ii) Evaluate the following integral by changing to polar coordinates:

निम्न द्विसमाकल को ध्रुवीय निर्देशांकों में परिवर्तित कर मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^{2a} \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

13) (i) Evaluate the following integral, when

$$x, y, z > 0 \text{ and } \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \leq 1$$

$$\iiint x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz$$

समाकल  $\iiint x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz$  का मान ज्ञात कीजिये जबकि

$$x, y, z > 0 \text{ व } \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \leq 1$$

(ii) Find the whole length of the cycloid

$$x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta), (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

चक्रज  $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta), (0 \leq \theta \leq 2\pi)$  की

सम्पूर्ण लम्बाई ज्ञात कीजिए।

\_\_\_\_\_